

NUMERI E FIGURE

di Giancarlo Travaglini*

L'utilizzo di argomenti geometrici per dimostrare risultati di Teoria dei Numeri ha una lunga storia, è di alto interesse per chi studia matematica e si presta ad alcune applicazioni didattiche tra le quali ce ne sono che possono anche essere presentate nella Scuola Secondaria.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca.

Hermann Minkowski (1864-1909) è stato uno dei matematici più importanti a cavallo tra il XIX e il XX secolo, e uno dei suoi maggiori contributi è stato la creazione della *Geometria dei Numeri*, grazie alla quale diversi problemi di Teoria dei Numeri sono stati tradotti in problemi geometrici a volte intuitivi.

Il punto di incontro tra l'ambiente geometrico e quello numerico è costituito dai *punti interi* (e più in generale dal concetto di *reticolo*). I punti interi sono semplicemente i punti con coordinate intere (vedi la Figura 2) nel piano o nello spazio cartesiano. Ad esempio $(3, -2)$, $(0, 14)$, $(-1, 20)$ sono

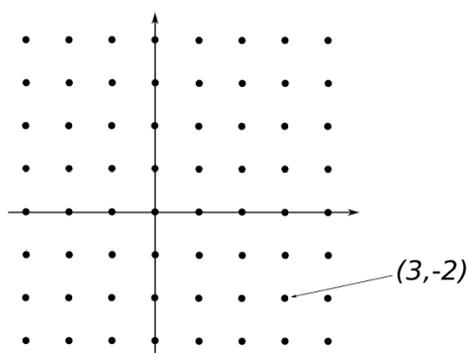


Figura 2: Punti a coordinate intere nel piano cartesiano.

punti interi del piano cartesiano \mathbb{R}^2 , mentre $(3, 0, 2)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 100, 2)$ sono punti interi dello spazio cartesiano tridimensionale \mathbb{R}^3 .



Figura 1: Hermann Minkowski.

In questa nota parleremo di problemi di Teoria dei Numeri che ammettono una interpretazione e una soluzione “geometriche”, non necessariamente legate al contributo di Minkowski.

Per iniziare, consideriamo i numeri razionali, che usualmente rappresentiamo sulla retta reale. In vari problemi è utile vederli anche come oggetti bidimensionali e rappresentarli attraverso i punti interi. Consideriamo le frazioni b/a , con $b \geq 0$ e $a > 0$, e associamo a ciascuna di esse il punto intero (a, b) . Se vogliamo una corrispondenza biunivoca con i razionali, dobbiamo considerare solo le *frazioni semplificate*, che, nel piano cartesiano, corrispondono ai punti interi *visibili dall'origine*. Ad esempio, il punto $(6, 4)$ non appare nella Figura 3 poiché, essendo “coperto” dal punto $(3, 2)$, non è visibile dall'origine (cioè $2/3$ è la semplificazione di $4/6$).

Il numero razionale b/a è il coefficiente angolare del segmento che collega l'origine con (a, b) . Quindi un numero razionale è maggiore di un altro se il suo segmento è più inclinato. La Figura 3 mostra i numeri razionali (cioè le frazioni semplificate, cioè i punti interi visibili dall'origine) con numeratori e denominatori ≤ 8 .

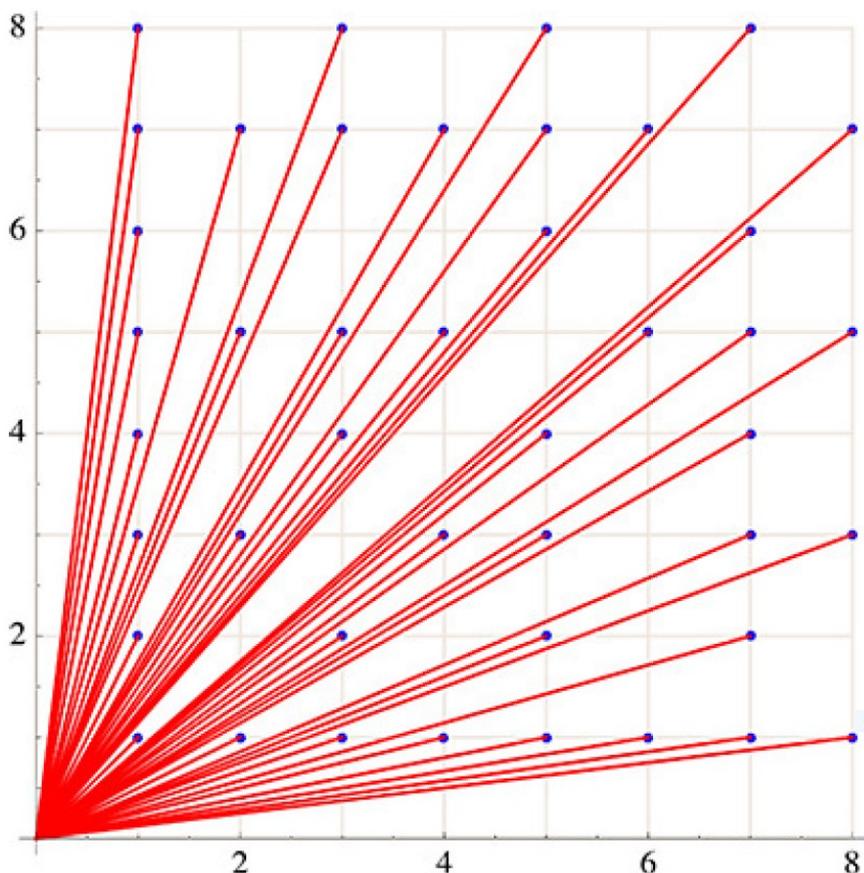


Figura 3: Numeri razionali e punti interi visibili dall'origine.

Questo punto di vista ci mostra una proprietà non evidente. Sia N un intero positivo e siano $b/a < q/p$ frazioni semplificate tali che $0 < b \leq a \leq N$, $0 < q \leq p \leq N$. Supponiamo che b/a e q/p siano *consecutive* tra

le frazioni con denominatore $\leq N$ (cioè non esiste n/m tale che $m \leq N$ e $b/a < n/m < q/p$). Ad esempio, $2/3$ e $5/8$ sono consecutive tra le frazioni con denominatore ≤ 8 (nella Figura 3 questo significa che nessun segmento è compreso tra quello che collega l'origine con $(3, 2)$ e quello che collega l'origine con $(8, 5)$). Mostriamo che allora $|aq - bp| = 1$. Infatti il triangolo che ha per vertici $(0, 0)$, (a, b) e (p, q) non ha punti interi nel suo interno (altrimenti esisterebbe una frazione compresa tra b/a e q/p) e ha solo tre punti interi sul bordo (poiché (a, b) e (p, q) sono visibili dall'origine). Allora il teorema di Pick, che vedremo tra poco, ci dice che questo triangolo ha area $1/2$. D'altra parte (vedi la Figura 4), l'uso del determinante o un calcolo diretto "aggiungendo e/o sottraendo figure" (vedi le pagine successive) prova che l'area di questo triangolo è $|aq - bp|/2$. Quindi $|aq - bp| = 1$.

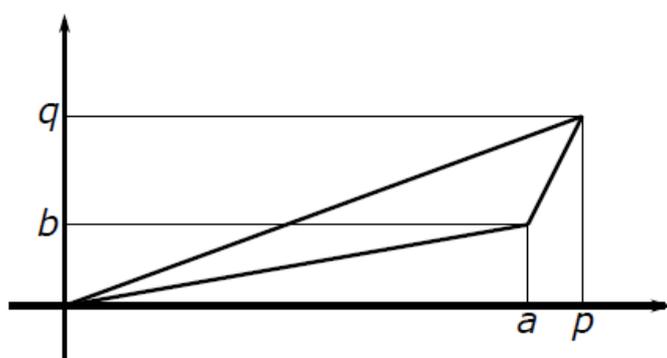


Figura 4: Questo triangolo ha area $|aq - bp|$.

Questo articolo è diviso in due parti.

- La **Parte A** è abbastanza discorsiva: presentiamo i problemi e qualche osservazione didattica, insieme ad alcune dimostrazioni non difficili e ad accenni ad argomenti più complessi. La Parte A può essere proposta - così com'è - a studenti della Scuola Superiore interessati alla Matematica, per una loro lettura ragionevolmente autonoma.
- La **Parte B** contiene le dimostrazioni solo accennate nella Parte A, insieme ad alcuni approfondimenti, e richiede la preparazione e la capacità di astrazione usualmente acquisite attraverso uno o due esami universitari di Matematica.

¹Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* leggiamo che "determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule" è tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della Scuola Primaria.

1 Parte A

1.1 Calcolare l'area di un un poligono disegnato su un foglio a quadretti

Prendiamo un foglio a quadretti e disegniamo (vedi la Figura 5) un poligono P avente i vertici nei punti dove si incrociano le linee del foglio (cioè in quelli che abbiamo chiamato punti interi). Chiamiamo *intero* un poligono con i vertici nei punti interi. Sono quindi i poligoni che a ciascuno di noi verrebbe naturale disegnare su un foglio a quadretti.

Un esercizio che richiama addirittura la Matematica della Scuola Primaria¹ consiste nel chiedere agli studenti di calcolare l'area di un poligono intero assegnato, disegnato su un foglio a quadretti. Gli alunni sono incoraggiati ad usare solo ciò che vedono sul foglio, scomponendo quindi il poligono in triangoli e/o rettangoli e/o altri poligoni interi, dei quali sono in grado di calcolare le aree. Consideriamo ad esempio il poligono nella Figura 5, che possiamo scomporre in vari modi, non tutti ugualmente convenienti.

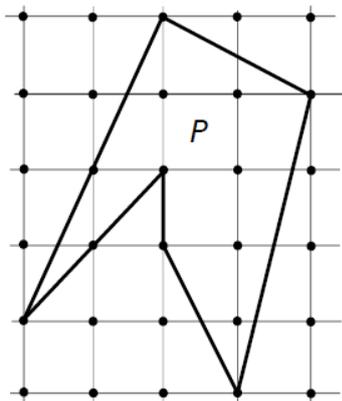


Figura 5: Un poligono intero.

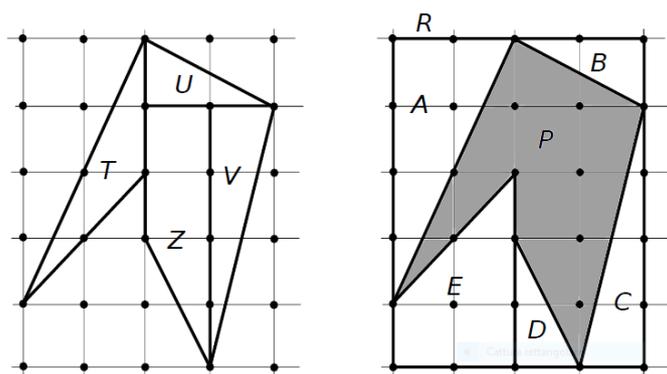


Figura 6: Due diverse scomposizioni per calcolare l'area di P

¹Nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* leggiamo che “determinare l'area di rettangoli e triangoli e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule” è tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della Scuola Primaria.

Ad esempio, nella parte sinistra della Figura 6 abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \text{Area}(T) + \text{Area}(U) + \text{Area}(V) + \text{Area}(Z) \\ &= 2 + 1 + 2 + 3 = 8, \end{aligned}$$

mentre nella parte destra partiamo dal rettangolo grande R e scriviamo

$$\begin{aligned} \text{Area}(P) &= \text{Area}(R) - \{\text{Area}(A) + \text{Area}(B) + \text{Area}(C) + \text{Area}(D) + \text{Area}(E)\} \\ &= 20 - (4 + 1 + 2 + 1 + 4) = 8. \end{aligned}$$

È abbastanza chiaro che la prima scomposizione comporta “qualche conto in meno” rispetto alla seconda. Confronti come questo sono utili e portano a discutere sul perché una scomposizione è più “conveniente” di un'altra, tenendo ad esempio conto del numero di prodotti necessari, e della facilità o difficoltà con cui si calcolano le lunghezze di basi e altezze (è più facile calcolare l'area di un triangolo intero avente una base su una riga del foglio). Si può quindi assegnare a ciascuna delle precedenti operazioni un “costo”, associando così un “costo totale” a ciascun modo di calcolare l'area scomponendo il poligono intero. È un esercizio con vari pregi:

- anche uno studente debole può iniziare a fare qualche tentativo (dando così al docente uno spunto da discutere con lo studente);
- non penalizza gli allievi più bravi (che hanno la possibilità di proporre soluzioni interessanti);
- gli studenti sono spinti a competere e a confrontare i propri risultati;
- il confronto tra varie soluzioni può anche non arrivare ad una conclusione condivisa, ma pone l'importante problema del *tempo necessario* per arrivare ad un risultato.

1.1.1 Il teorema di Pick

Se P è un poligono intero è possibile calcolare la sua area usando un elegante risultato dimostrato nel 1899 da Georg Pick.

Teorema 1 (Pick) *Sia P un poligono intero semplice (dove cioè i lati non si incrociano). Indichiamo con I il numero dei punti interi nell'interno di P e con B il numero dei punti interi sul bordo di P . Allora*

$$\text{Area}(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Ad esempio il poligono nella Figura 5 ha 5 punti interni e 8 punti sul bordo, quindi, come abbiamo già calcolato per altra via,

$$\text{Area}(P) = 5 + \frac{8}{2} - 1 = 8.$$

Supponiamo per semplicità che il poligono sia convesso e spezziamo la dimostrazione del teorema di Pick in vari passi.

- **Primo Passo.** Osservare che un poligono convesso intero P può essere decomposto come unione di triangoli interi, senza sovrapposizioni, tranne al più sui lati (e quindi l'area di P è la somma delle aree di questi triangoli). Questo procedimento si chiama *triangolazione di P* . Vedi la Figura 7.
- **Secondo Passo.** Riscrivere l'enunciato del teorema di Pick in una forma che coinvolga gli angoli di P .
- **Terzo Passo.** Provare che è sufficiente dimostrare il teorema di Pick per un triangolo.
- **Quarto Passo.** Dimostrare il teorema di Pick per un triangolo.

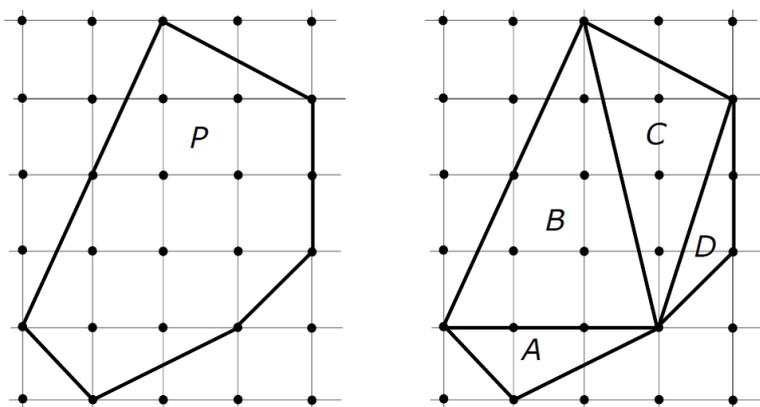


Figura 7: Triangolazione.

1.1.2 Prima parte della dimostrazione del teorema di Pick

Dimostrazione del Primo Passo. Come nella Figura 7, fissiamo un vertice del poligono convesso P e tracciamo tutte le diagonali che partono da questo vertice. In questo modo decomponiamo il poligono P nell'unione dei triangoli A, B, \dots . Se P ha L lati, allora lo abbiamo scomposto in $(L - 2)$ triangoli e quindi la somma degli angoli interni di P è $\pi(L - 2)$. Notiamo che questi triangoli sono interi, poiché sono stati ottenuti “aggiungendo” segmenti che collegano punti interi. Se il poligono non è convesso, la triangolazione è ancora possibile, ma richiede una dimostrazione diversa. ■

Dimostrazione del Secondo Passo. Associamo ad ogni punto intero del foglio un *angolo* (vedi la Figura 8 per la giustificazione del termine “angolo”), cioè un numero, nel seguente modo:

- associamo 1 se il punto è nell’interno di P , quindi non su un lato,
- associamo 0 se il punto è esterno a P ,
- associamo $\alpha/(2\pi)$ se il punto è un vertice di P con angolo interno α ,
- associamo $1/2$ se il punto è su un lato di P , ma non su un vertice.

Chiamiamo questi valori gli *angoli associati a P* (sui punti interi). Nella Figura 8 vediamo gli angoli associati a un poligono P e notiamo che, ad esempio, ad un angolo interno di ampiezza $\pi/2$ abbiamo associato $1/4$, cioè $(\pi/2)/(2\pi)$.

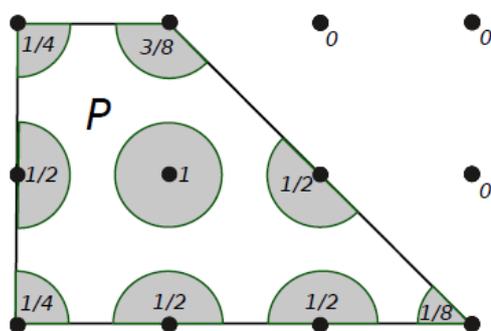


Figura 8: Il teorema di Pick in termini di angoli.

Gli angoli associati a P hanno un significato geometrico abbastanza semplice: sono ottenuti centrando in ogni punto intero del piano un piccolo disco e calcolando la “percentuale” del disco contenuta nel poligono.

Ora osserviamo che (vedi il Teorema 1 per le definizioni di I e B), se P ha L lati (e quindi L vertici), allora la somma degli angoli associati a P è uguale a

$$\underbrace{I}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{dei punti} \\ \text{nell'interno} \\ \text{di } P}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \pi (L - 2)}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{dei vertici}}} + \underbrace{(B - L) \frac{1}{2}}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{dei punti} \\ \text{sui lati, ma} \\ \text{non sui vertici}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{dei punti} \\ \text{esterni a } P}} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Quindi possiamo rinunciare il teorema di Pick nel seguente modo (che, per inciso, è valido anche per poligoni intrecciati).

Teorema 2 (Secondo enunciato del teorema di Pick) *Se P è un poligono intero, allora la sua area è uguale alla somma degli angoli ad esso associati.*

Se pensiamo il poligono come una stanza e i punti interi come lampadine, allora l'angolo associato a ciascun punto è il contributo della lampadina all'illuminazione della stanza. Quindi il teorema di Pick dice che l'area della stanza è uguale al contributo di tutte le lampadine nei punti interi del piano (Figura 9). Osserviamo che non è necessario calcolare gli angoli interni: ci

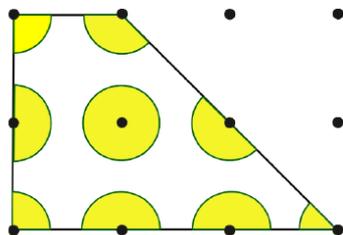


Figura 9: L'area della stanza è uguale al contributo delle lampadine.

basta conoscere la loro somma, cioè $\pi(L - 2)$, dove L è il numero dei lati del poligono.

Completeremo la dimostrazione del teorema di Pick nella Parte B.

Ad un bambino della Scuola Primaria non parliamo di dimostrazioni, ma possiamo presentargli il teorema di Pick come un metodo per calcolare aree di poligoni, sfidandolo a verificarne la correttezza su alcuni esempi da lui scelti. È un buon esercizio, poiché la sua prima reazione dovrebbe essere "Non ci credo!". Ci aspettiamo quindi che cerchi di costruire un poligono che non soddisfa il teorema di Pick (che ovviamente non esiste, ma cercarlo non è tempo sprecato). Dobbiamo spiegarci che avere verificato la formula in tre o quattro casi non implica la sua validità in generale, ma dobbiamo ricordarci che spesso un buon numero di esempi significativi aiuta a capire perché un certo risultato è vero in generale. Possiamo inoltre "indirizzare" la scelta degli esempi dicendo al ragazzo di verificare la formula per un rettangolo, poi per un triangolo rettangolo, ... ripetendo così a rovescio una parte della dimostrazione che vedremo nella Parte B. Senza pretendere che stia dimostrando alcunché, ma mostrandogli che a volte gli esempi semplici sono particolarmente istruttivi.

Esercizio 3 Calcolare il numero dei punti interi nel triangolo (senza bordo) T di vertici $(0, 0)$, $(2000, 0)$, $(0, 1000)$.

Soluzione. Si tratta di un triangolo rettangolo, ottenuto dilatando 1000 volte il triangolo (piccolo) di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$. In questo triangolo piccolo un cateto è costituito da un segmento unitario, l'altro cateto da due segmenti unitari (separati da un punto intero), e l'ipotenusa da un segmento di lunghezza $\sqrt{5}$ (senza punti interi nel suo interno). Dilatando 1000 volte il triangolo piccolo otteniamo T , che ha un cateto costituito da 1000 segmenti unitari, l'altro cateto costituito da 2000 segmenti unitari e l'ipotenusa costituita da 1000 segmenti di lunghezza $\sqrt{5}$ (separati da punti interi). Dunque il bordo di T si spezza in 4000 segmenti, e quindi contiene esattamente 4000 punti interi. Inoltre T ha area 1000000. Allora, per il teorema di Pick, il numero di punti nell'interno del triangolo T è uguale a

$$1000000 - 2000 + 1 = 998.001 .$$

1.2 Si può fare in ... π modi

Forse nessun altro teorema della Matematica ha insieme la fama e l'importanza del

Teorema 4 (di Pitagora) *Dato un triangolo rettangolo, con i cateti di lunghezze a, b e l'ipotenusa di lunghezza c , abbiamo*

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Se a, b e c sono numeri interi positivi diciamo che (a, b, c) è una *Terna Pitagorica* (*primitiva* quando a, b, c sono privi di divisori comuni).

Probabilmente il primo esempio in cui abbiamo “visto” il teorema di Pitagora è stato un triangolo rettangolo con i lati di lunghezze 3, 4, 5, disegnato su un foglio a quadretti (Figura 10).

Le terne pitagoriche sono legate al problema di calcolare il numero $r(n)$ dei modi nei quali un numero intero $n \geq 0$ può essere scritto come somma di due quadrati, cioè

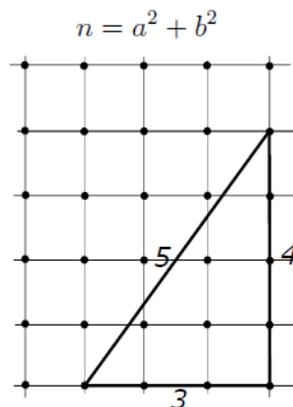


Figura 10: La terna pitagorica (3, 4, 5).

(conviene qui contare anche le scelte di a e b negative o nulle). Quindi, ad esempio,

$0 = 0^2 + 0^2$,	$r(0) = 1$
$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 1)^2$,	$r(1) = 4$
$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2$,	$r(2) = 4$
3 non è somma di due quadrati	,	$r(3) = 0$
$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 2)^2$,	$r(4) = 4$
$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 2)^2$,	$r(5) = 8$
6 non è somma di due quadrati	,	$r(6) = 0$
7 non è somma di due quadrati	,	$r(7) = 0$
$8 = (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2$,	$r(8) = 4$
$9 = (\pm 3)^2 + 0^2 = 0^2 + (\pm 3)^2$,	$r(9) = 4$
$10 = (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$,	$r(10) = 8$
11 non è somma di due quadrati	,	$r(11) = 0$
\vdots		\vdots
$65 = (\pm 7)^2 + (\pm 4)^2 = (\pm 4)^2 + (\pm 7)^2$,	$r(65) = 16$
$= (\pm 8)^2 + (\pm 1)^2 = (\pm 1)^2 + (\pm 8)^2$		
\vdots		\vdots

Possiamo interpretare geometricamente questi valori dicendo che nel piano cartesiano le circonferenze centrate in $(0, 0)$ con raggio $\sqrt{4}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{40}$ o $\sqrt{65}$ incontrano punti a coordinate intere, mentre quelle con raggio $\sqrt{6}$ o $\sqrt{7}$ non ne incontrano. Vedi la Figura 11.

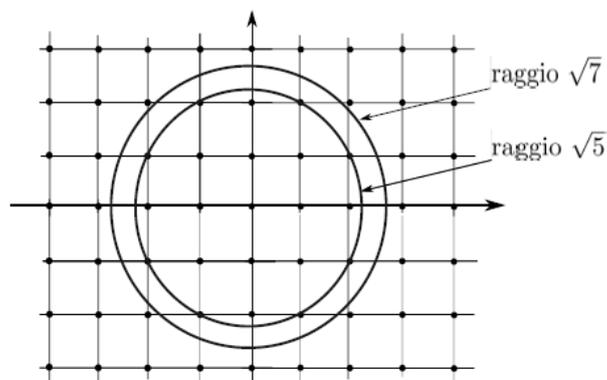


Figura 11: La circonferenza $x^2 + y^2 = 5$ incontra 8 punti interi. La circonferenza $x^2 + y^2 = 7$ non incontra punti interi..

Dalla tabella precedente intuimmo che $r(n)$ ha un comportamento irregolare e non ammette limite per $n \rightarrow +\infty$. Studiamo quindi, per N grande, la media

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(N)}{N}$$

Vale il seguente risultato, semplice e suggestivo, osservato da C. F. Gauss nel 1801.

Teorema 5 (Gauss) Per $N \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(N)}{N} = \pi + \text{Errore},$$

dove $|\text{Errore}| \leq 2\pi N^{-1/2}$.

Quindi, mediamente, un intero positivo n può essere scritto come somma di due quadrati in π modi.

La ricerca di stime ottimali per l'errore

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(N)}{N} - \pi$$

costituisce il *Problema del cerchio di Gauss*, uno dei più famosi e irrisolti problemi della Teoria dei Numeri.

1.3 Quanti divisori ha un numero?

Ad ogni intero positivo n associamo il numero $d(n)$ dei suoi divisori positivi.

Quindi, ad esempio,

1 ha come divisori solo 1	,	$d(1) = 1$
2 ha come divisori 1, 2	,	$d(2) = 2$
3 ha come divisori 1, 3	,	$d(3) = 2$
4 ha come divisori 1, 2, 4	,	$d(4) = 3$
5 ha come divisori 1, 5	,	$d(5) = 2$
6 ha come divisori 1, 2, 3, 6	,	$d(6) = 4$
7 ha come divisori 1, 7	,	$d(7) = 2$
8 ha come divisori 1, 2, 4, 8	,	$d(8) = 4$
9 ha come divisori 1, 3, 9	,	$d(9) = 3$
10 ha come divisori 1, 2, 5, 10	,	$d(10) = 4$
11 ha come divisori 1, 11	,	$d(11) = 2$
⋮		⋮
210 ha come divisori 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14,	,	$d(210) = 16$
15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210		
⋮		⋮

Se p è un numero primo, allora $d(p) = 2$, mentre se indichiamo con $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... i numeri primi in ordine crescente e consideriamo il numero $q_M = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_M$ (ad esempio $q_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$) allora $d(q_M) = 2^M$. Infatti, sempre come esempio, i sedici divisori

1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210

di $q_4 = 210$ sono in corrispondenza biunivoca con i sedici sottoinsiemi dell'insieme $\{2, 3, 5, 7\}$:

$$\begin{aligned} \emptyset : 2^0 3^0 5^0 7^0 = 1, \quad \{2\} : 2^1 3^0 5^0 7^0 = 2, \quad \{3\} : 2^0 3^1 5^0 7^0 = 3, \\ \{5\} : 2^0 3^0 5^1 7^0 = 5, \quad \{7\} : 2^0 3^0 5^0 7^1 = 7, \quad \{2, 3\} : 2^1 3^1 5^0 7^0 = 6, \\ \{2, 5\} : 2^1 3^0 5^1 7^0 = 10, \quad \{2, 7\} : 2^1 3^0 5^0 7^1 = 14, \quad \{3, 5\} : 2^0 3^1 5^1 7^0 = 15, \\ \{3, 7\} : 2^0 3^1 5^0 7^1 = 21, \quad \{5, 7\} : 2^0 3^0 5^1 7^1 = 35, \quad \{2, 3, 5\} : 2^1 3^1 5^1 7^0 = 30, \\ \{2, 3, 7\} : 2^1 3^1 5^0 7^1 = 42, \quad \{2, 5, 7\} : 2^1 3^0 5^1 7^1 = 70, \\ \{3, 5, 7\} : 2^0 3^1 5^1 7^1 = 105, \quad \{2, 3, 5, 7\} : 2^1 3^1 5^1 7^1 = 210. \end{aligned}$$

Fissare un sottoinsieme significa decidere, per ciascuno degli elementi dell'insieme, cioè per ciascuno degli M numeri primi p_1, p_2, \dots, p_M , se selezionarlo o non selezionarlo. Abbiamo quindi 2 scelte per p_1 , abbiamo 2 scelte per p_2 , ... , abbiamo 2 scelte per p_M . Allora il numero dei sottoinsiemi è 2^M .

Dunque $d(n)$ ha un comportamento irregolare ed è significativo studiarne la media. Vale il seguente risultato, che nella Parte B dimostreremo in una forma più precisa.

Teorema 6 *In media $d(N)$ non supera $1 + \log(N)$. Cioè per ogni $N \geq 1$ abbiamo*

$$\frac{d(1) + d(2) + d(3) + \dots + d(N)}{N} \leq 1 + \log(N) ,$$

dove \log è il logaritmo naturale.

Dimostrazione. Dobbiamo contare i divisori di tutti i numeri naturali $\leq N$. Supponiamo che un intero positivo p divida un intero positivo $k \leq N$. Allora esiste q intero positivo tale che $pq = k (\leq N)$. Schematizziamo i passaggi della dimostrazione.

- **Primo Passo.** I divisori dei numeri naturali $\leq N$ sono tanti quanti i prodotti (ordinati) $pq (\leq N)$, con p, q interi positivi.
- **Secondo Passo.** I prodotti (ordinati) $pq (\leq N)$ sono tanti quanti i rettangoli (nel primo quadrante, con un vertice nell'origine e i lati paralleli agli assi) che stanno sotto il grafico della funzione $y = N/x$ (vedi la Figura 12).

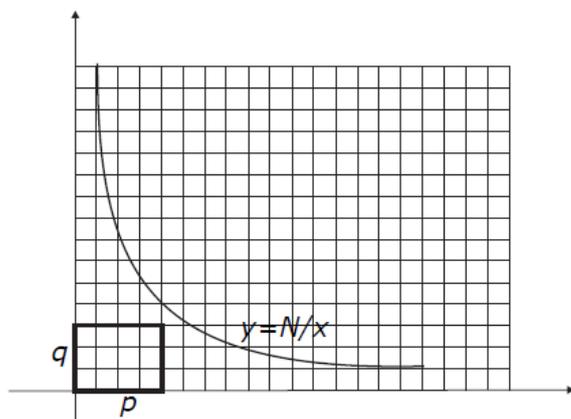


Figura 12: I divisori sono tanti quanti i rettangoli.

- **Terzo Passo.** Questi rettangoli sono tanti quanti i loro quadratini di lato 1 in alto a destra nei rettangoli (vedi la Figura 13).

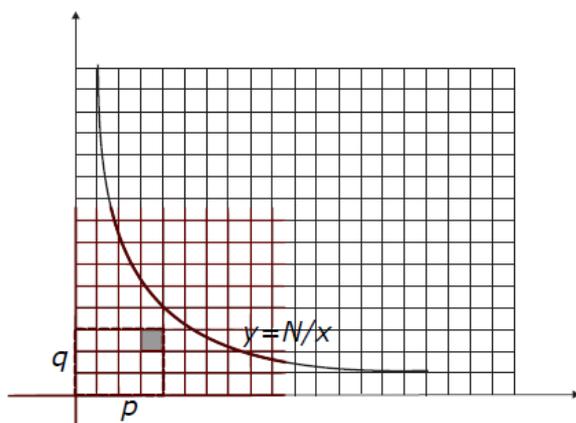


Figura 13: I rettangoli sono tanti quanti i quadratini.

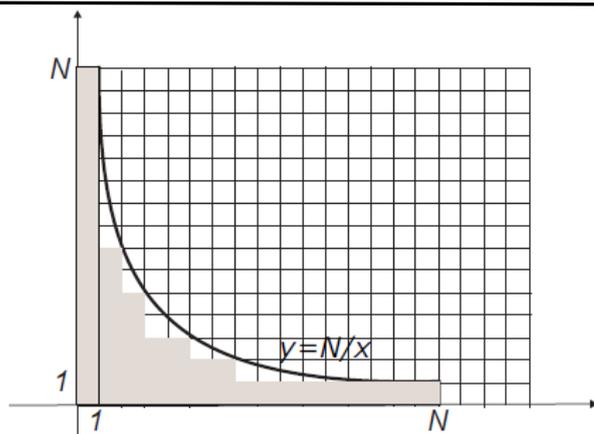


Figura 14: Il numero dei quadratini è uguale all'area della parte grigia.

- **Quarto Passo.** Il numero di questi quadratini è uguale all'area della parte grigia nella Figura 14 .
- **Quinto Passo.** L'area della parte grigia è minore di N (N è l'area del rettangolo alto e stretto a sinistra) più l'integrale della funzione $y = N/x$ tra 1 ed N . Vedi la Figura 14.

In conclusione

$$d(1) + d(2) + d(3) + \dots + d(N) \leq N + \int_1^N \frac{N}{x} dx = N(1 + \log(N))$$

Dividendo per N concludiamo la dimostrazione. ■

Alcune osservazioni.

L'area della parte grigia non è "solo" minore di $1 + \log(N)$, ma è quasi uguale a $\log(N)$. Lo preciseremo nella Parte B.

Il teorema precedente ci dà una maggiorazione della media dei valori di $d(n)$. I singoli valori possono essere decisamente diversi, ad esempio, $d(210) = 16$, ma $1 + \log(210) = 6,347\dots$

Notiamo che l'argomento nella precedente dimostrazione è simile a quello usato nella dimostrazione del Teorema 5 di Gauss, dove abbiamo contato i quadratini dentro un grande disco centrato nell'origine.

1.4 Teorema di Minkowski e approssimazione diofantea

Sappiamo che per ogni numero reale esistono numeri razionali ad esso arbitrariamente vicini. Ad esempio, il numero

$$\pi = 3,14159265358979\dots$$

è approssimato da $3,1 = 31/10$ a meno di $1/10$, da $3,14 = 314/100$ a meno di $1/100$, da $3,141 = 3141/1000$ a meno di $1/1000$, e così via. È chiaro che per migliorare l'approssimazione dobbiamo aumentare i denominatori (meno però di quanto appare considerando la precedente approssimazione decimale).

Possiamo infatti ricordare che

$$\frac{22}{7} = 3,14285\dots$$

è una buona approssimazione di π , ottenuta con un denominatore piccolo. A poco prezzo otteniamo l'approssimazione di π data da

$$\frac{355}{113} = 3,14159292035398\dots,$$

che con un denominatore di tre cifre approssima π fino alla sesta cifra dopo la virgola. Stiamo cercando una relazione tra l'approssimazione e i denominatori. Ci chiediamo cioè quanto grande deve essere il denominatore n perché una frazione p/n approssimi un numero reale β con un errore massimo fissato. La risposta più famosa a questa domanda è data dal seguente teorema, dimostrato da Dirichlet verso il 1840. Noi lo proveremo usando la *Geometria dei Numeri* di Minkowski; non è la dimostrazione più rapida, ma mostra bene un aspetto geometrico presente in alcuni problemi di approssimazione diofantea (cioè problemi di approssimazione di numeri reali attraverso frazioni).

Teorema 7 (Dirichlet) *Per ogni numero reale β ed ogni intero positivo N esistono due interi n e p tali che*

$$1 \leq n \leq N, \quad \left| \beta - \frac{p}{n} \right| \leq \frac{1}{nN}.$$

Useremo la seguente “semplificazione” dell’enunciato del teorema di Minkowski, che dimostreremo (in una forma più generale) nella Parte B.

Teorema 8 (Minkowski) *Sia P un parallelogrammo (privo del bordo) nel piano cartesiano, con centro in $(0, 0)$. Supponiamo che P non contenga punti interi diversi da $(0, 0)$. Allora $\text{Area}(P) \leq 4$.*

Osserviamo il teorema su due esempi. Il primo è banale: il quadrato (senza bordo) di vertici $(\pm 1, \pm 1)$ è centrato in $(0, 0)$, non contiene punti interi diversi da $(0, 0)$ e ha area 4. Più interessante è l'esempio di un rettangolo in posizione obliqua, che cerca di allontanarsi dall'origine, con area massima. Consideriamo, ad esempio, per ogni intero positivo n , il punto intero $A = (n, 1)$, e il più grande rettangolo che ammette la retta $x = ny$ come asse e non contiene punti interi ($\neq (0, 0)$) al suo interno (vedi la Figura 15). L'area

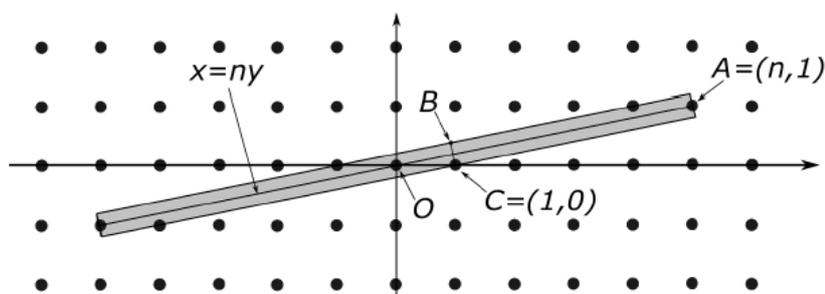


Figura 15: Un rettangolo che si allontana dall'origine senza includere punti interi $\neq (0, 0)$.

di questo rettangolo è due volte la lunghezza di OA (cioè $2\sqrt{n^2 + 1}$) per la lunghezza del segmento BC (che è perpendicolare alla retta $x = ny$). Abbiamo

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= 2 \sin(AOC) = 2\sqrt{1 - \cos^2(AOC)} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \tan^2(AOC)}} \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{1}{1 + (1/n)^2}} = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 1}} \end{aligned}$$

e quindi il rettangolo grigio nella Figura 15 ha area 4.

Se β è irrazionale, allora la retta $y = \beta x$ non incontra alcun punto intero diverso dall'origine. Se $\beta = p/n$ è razionale e il punto intero (n, p) è molto lontano dall'origine, può essere conveniente sostituire la frazione p/n con una frazione che abbia numeratore e denominatore piccoli. Qualsiasi sia β reale, cercare i punti interi vicini alla retta $y = \beta x$ ci porta così al teorema di approssimazione di Dirichlet. Sia

$$P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -N - 1/2 \leq x \leq N + 1/2, \quad |\beta x - y| < 1/N\} .$$

(vedi la Figura 16). P è un parallelogramma con centro nell'origine, di area

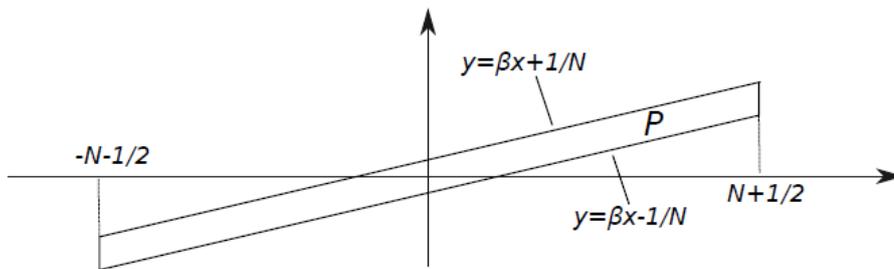


Figura 16: Il teorema di Dirichlet attraverso il teorema di Minkowski.

$4 + 2/N$. Allora, per il precedente teorema di Minkowski, esiste un punto intero $(0, 0) \neq (n, p) \in P$. Quindi $1 \leq n \leq N$ e $|\beta n - p| < 1/N$.

Esercizio 9 Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 100\}$$

e supponiamo che in ogni punto intero contenuto in D (esclusa l'origine) sia piantato un albero con il tronco di sezione circolare e diametro 0,25. Dimostrare che stando nell'origine non si può vedere fuori dal bosco.

Soluzione. Possiamo vedere fuori dal bosco (stando nell'origine) se esiste una retta (come quella rossa tratteggiata nella Figura 17 che passa dall'origine e non tocca gli alberi (e quindi ha distanza $\geq 0,125$ da ciascun punto intero contenuto in D). Allora questa retta è l'asse di un rettangolo centrato nell'origine, con lati di lunghezza (almeno) 0,25 e 18 (e quindi di area > 4) che non contiene punti interi diversi dall'origine. Contro il teorema di Minkowski.

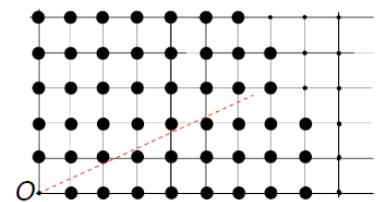


Figura 17: Non si riesce a vedere fuori dal bosco.

2 Parte B

2.1 Dimostrazione del teorema di Pick

Il Primo e il Secondo Passo sono stati dimostrati nella Parte A.

Dimostrazione del Terzo Passo. Pensiamo ad un poligono intero P visto come unione di due poligoni interi A e B che si toccano solo su un lato. Osserviamo (vedi la Figura 18) che

$$\begin{aligned} \text{somma degli angoli associati a } P &= (\text{somma degli angoli associati ad } A) \\ &+ (\text{somma degli angoli associati a } B) \end{aligned}$$

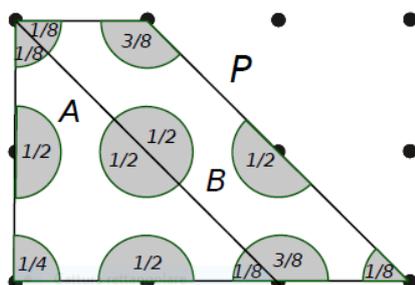


Figura 18: Il teorema di Pick è “additivo”.

e che, ovviamente,

$$\text{Area}(P) = \text{Area}(A) + \text{Area}(B) .$$

Quindi se il teorema di Pick è vero per A e B , allora è vero anche per P (analogamente: se il teorema di Pick è vero per P ed A , allora è vero per B). Basta allora dimostrare il teorema di Pick per un triangolo intero. ■

Dimostrazione del Quarto Passo. Consideriamo innanzitutto un rettangolo intero con i lati paralleli alle linee del foglio (vedi la parte sinistra della Figura 19). Se il rettangolo R ha p punti su un lato e q punti sull'altro,

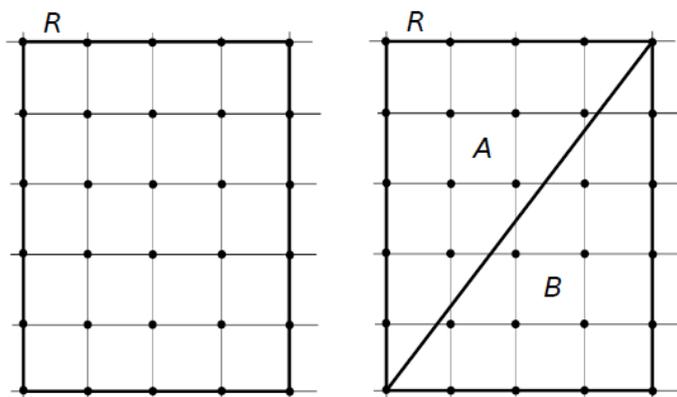


Figura 19: Il teorema di Pick per un rettangolo e per un triangolo rettangolo.

allora ci sono $(p - 2)(q - 2)$ punti nell'interno (cui è assegnato angolo 1), ci sono $2(p - 2) + 2(q - 2)$ punti sul bordo ma non sui vertici (con angolo associato $1/2$), e 4 vertici (con angolo associato $1/4$). Quindi

$$\text{Area}(R) = (p - 1)(q - 1) = pq - p - q + 1 ,$$

$$\begin{aligned} \text{somma degli angoli associati a } R &= (p - 2)(q - 2) + (p - 2) + (q - 2) + 1 \\ &= pq - p - q + 1 . \end{aligned}$$

Quindi il teorema di Pick è vero per un rettangolo intero con i lati paralleli alle linee del foglio. Adesso vediamo questo rettangolo R come unione di due triangoli rettangoli disgiunti (a parte i bordi): $R = A \cup B$, vedi la parte destra della Figura 19. Questi due triangoli rettangoli sono uguali nel senso che (dopo una rotazione di 180°) possono sovrapporsi uno all'altro in modo che anche i punti interi vadano a sovrapporsi. Quindi uno dei due soddisfa il teorema di Pick se e solo se l'altro lo soddisfa. Infatti, supponiamo, ad esempio, che la somma degli angoli associati ad A sia maggiore dell'area di A . Allora lo stesso accade per B e quindi la somma degli angoli associati a R è maggiore dell'area di R . Questo è impossibile poiché abbiamo appena visto che il rettangolo R soddisfa il teorema di Pick. Infine consideriamo un qualsiasi triangolo intero; lo racchiudiamo nel più piccolo rettangolo con i lati paralleli alle linee del foglio. Abbiamo le due possibilità mostrate nella Figura 20. Osserviamo che nel primo caso il triangolo è ottenibile "sottraendo" tre

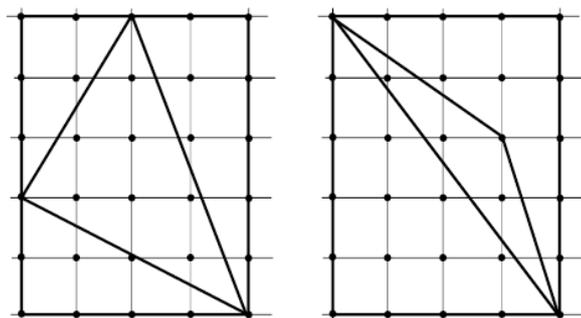


Figura 20: Il caso di un triangolo generico.

triangoli rettangoli dal rettangolo, mentre nel secondo caso il triangolo è ottenibile "sottraendo" tre triangoli rettangoli e un rettangolo dal rettangolo grande. Questo completa la dimostrazione del teorema di Pick (nel caso di un poligono convesso). ■

2.2 Dimostrazione del teorema di Gauss

Dimostrazione. Come abbiamo detto, $r(n)$ è il numero dei punti interi di \mathbb{R}^2 che stanno sulla circonferenza con centro nell'origine e raggio $n^{1/2}$. Quindi

$$\frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(N)}{N} = \frac{1}{N} \text{card} (\mathbb{Z}^2 \cap B(0, N^{1/2})) ,$$

dove

$$B(0, r) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

è il disco di centro $(0, 0)$ e raggio r . Pensiamo ogni punto dell'insieme $\mathbb{Z}^2 \cap B(0, N^{1/2})$ come il centro di un quadrato con i lati di lunghezza 1, paralleli agli assi. Indichiamo con $K(0, N^{1/2})$ l'unione di questi quadrati, cioè l'insieme grigio nella Figura 21. Allora

$$\text{card}(\mathbb{Z}^2 \cap B(0, N^{1/2})) = \text{Area}(K(0, N^{1/2}))$$

e valgono le inclusioni

$$B\left(0, N^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \subset K(0, N^{1/2}) \subset B\left(0, N^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Da questo segue, calcolando le aree dei due dischi,

$$\frac{\pi}{N} \left(N^{1/2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 < \frac{r(0) + r(1) + r(2) + \dots + r(N)}{N} < \frac{\pi}{N} \left(N^{1/2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

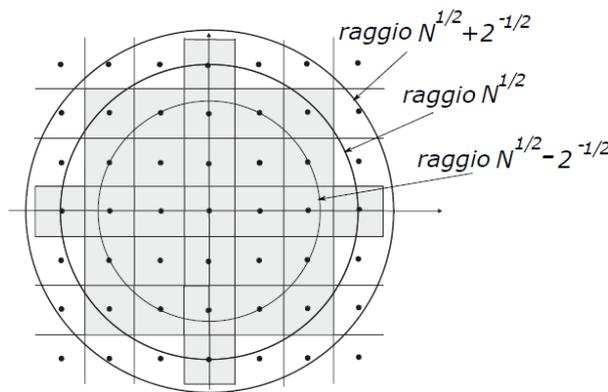


Figura 21: Punti interi in un disco.

da cui, sottraendo π , si ottiene la tesi. ■

Abbiamo approssimato l'area del disco con il numero dei punti interi contenuti. Questo si presta a qualche osservazione.

Possiamo usare il numero dei punti interi contenuti nel disco per approssimare π . È un esercizio interessante perché permette di ottenere realmente qualche cifra di π , e perché ci sono modi più o meno veloci per contare i punti interi nel cerchio.

L'approssimazione dell'area del disco con il numero dei punti interi in esso contenuti non è altro che l'approssimazione di un integrale attraverso una somma di Riemann. Infatti

$$\text{card}(\mathbb{Z}^2 \cap B(0, N^{1/2})) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \chi_{B(0, N^{1/2})}(n),$$

$$\text{Area}(B(0, N^{1/2})) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B(0, N^{1/2})}(t) dt,$$

dove

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in A \\ 0 & \text{se } t \notin A \end{cases}$$

è la funzione caratteristica (o funzione indicatrice) di un insieme A .

2.3 Il teorema dei divisori di Dirichlet

Iniziamo chiedendoci se esistono relazioni tra la somma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}$$

e l'integrale

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx = \log(N) .$$

Nelle Figure 22 e 23 i rettangoli disegnati hanno tutti base di lunghezza 1 e quindi i valori delle loro aree (scritti all'interno) sono uguali ai valori delle rispettive altezze. I rettangoli nella figura 22 stanno sotto il grafico della funzione $y = 1/x$, mentre l'unione dei rettangoli nella figura 23 "copre" il grafico di $y = 1/x$. Allora

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} < \int_1^N \frac{1}{x} dx = \log(N) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1} .$$

e quindi

$$\frac{1}{N} + \log(N) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} < 1 + \log(N) .$$

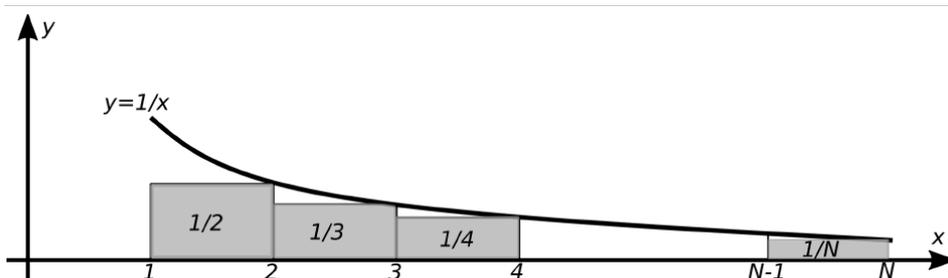


Figura 22: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} < \int_1^N \frac{1}{x} dx$.

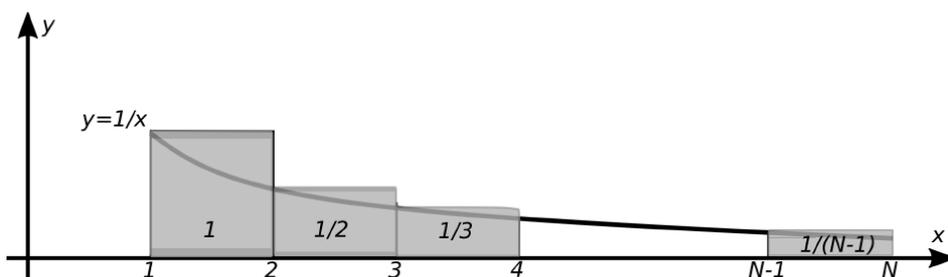


Figura 23: $\int_1^N \frac{1}{x} dx < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1}$.

Il limite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) - \log(N) \right\}$$

converge, è indicato con il simbolo

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) - \log(N) \right\}$$

ed è chiamato *Costante di Eulero-Mascheroni*. Le Figure 24 e 25 costituiscono una dimostrazione del fatto che questo limite esiste finito: la costante di Eulero-Mascheroni è uguale alla somma delle aree delle parti nere. Im-

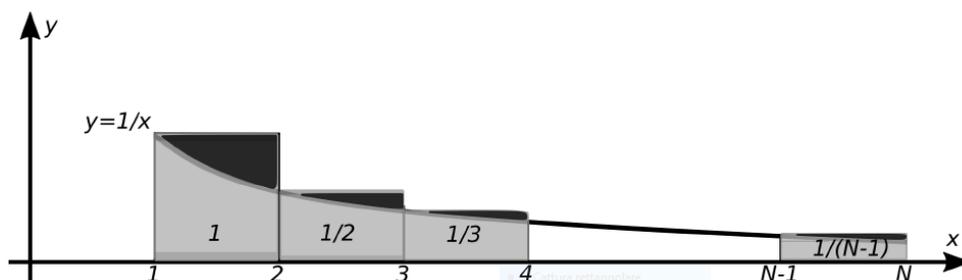


Figura 24: La differenza tra la somma e l'integrale.

Figura 24: La differenza tra la somma e l'integrale.

maginiamo di “spingere” verso sinistra le parti nere, come “chiudendo dei cassetti”, (vedi la Figura 25) in modo da sistemarle tutte, una sotto l'altra, dentro il quadrato che ha per base il segmento $[1, 2]$. Poiché le parti nere così

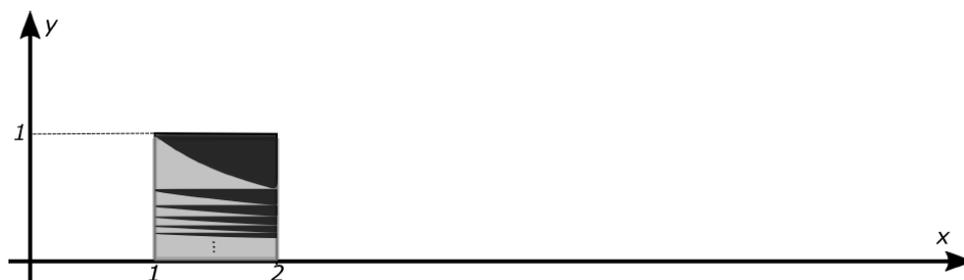


Figura 25: Un ritratto della costante di Eulero-Mascheroni.

messe nel quadrato sono distinte e poiché ciascuna di esse è un “triangolo gonfiato” vediamo che il limite γ esiste, è finito e

$$\frac{1}{2} < \gamma < 1 ,$$

poiché se fossero dei veri triangoli la somma delle loro aree sarebbe uguale a $1/2$.

Ragionando come in precedenza si può mostrare che

$$\left| 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log n - \gamma \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (1)$$

Infatti il termine a sinistra in (1) è la somma delle aree dei triangolini gonfiati che restano dopo avere tolto i primi N (vedi la Figura 24). Questi triangolini gonfiati rimasti possono essere spinti (senza intersezioni reciproche) dentro il rettangolo di base $[1, 2]$ e altezza $1/n$.

Un calcolo mostra che $\gamma = 0,57721\dots$. Non è noto se γ è un numero razionale o irrazionale.

Cattura rettangolare

Possiamo ora dimostrare questo teorema, provato da J. Dirichlet nel 1849.

Teorema 10 (Dirichlet) Per $N \rightarrow +\infty$ abbiamo

$$\frac{d(1) + d(2) + \dots + d(N)}{N} = \log N + (2\gamma - 1) + \mathcal{O}(N^{-1/2}).$$

Dimostrazione. Sia $u = \lceil \sqrt{N} \rceil$ la parte intera di \sqrt{N} . Allora

$$u^2 = N + \mathcal{O}(\sqrt{N})$$

$$\log u = \frac{1}{2} \log(N + \mathcal{O}(\sqrt{N})) = \frac{1}{2} \log N + \mathcal{O}(N^{-1/2}).$$

Sappiamo che la somma $d(1) + d(2) + \dots + d(N)$ è uguale all'area della parte in grigio nella Figura 14. Abbiamo anche osservato che contare i quadratini sotto l'iperbole equivale a contare i punti interi (con le coordinate positive) sotto l'iperbole. Siano $A = (0, 0)$, $B = (0, u)$, $C = (u, u)$, $D = (u, 0)$ come nella Figura 26. Essendo $(u + 1)^2 > N$, il punto $(u + 1, u + 1)$ non sta sotto l'iperbole e quindi il numero dei punti interi compresi tra gli assi e il grafico dell'iperbole è 2 volte il numero dei punti compresi nella striscia tra AY e DF (contando quelli su DF , ma non quelli su AY), meno il numero dei punti compresi nel quadrato $ABCD$, nel quale viene contato solo metà del bordo (cioè sottraiamo u^2 punti). La striscia tra AY e DF è unione di rettangoli di base 1 e altezze $\lceil \frac{N}{1} \rceil, \lceil \frac{N}{2} \rceil, \dots, \lceil \frac{N}{u} \rceil$. Allora, per (1),

$$\begin{aligned} d(1) + d(2) + \dots + d(N) &= 2 \left(\left\lceil \frac{N}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{N}{u} \right\rceil \right) - u^2 \\ &= 2 \left(N + \frac{N}{2} + \dots + \frac{N}{u} \right) - u^2 + \mathcal{O}(u) \end{aligned}$$

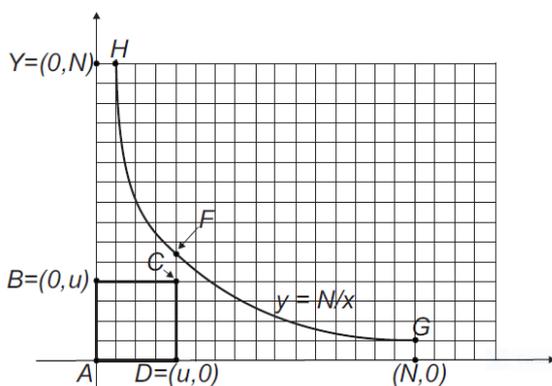


Figura 26: Contiamo i punti interi sotto l'iperbole.

$$= 2N \left(\log u + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{u}\right) \right) - u^2 + \mathcal{O}(u)$$

$$= N \log N + (2\gamma - 1)N + \mathcal{O}(\sqrt{N}) .$$

La ricerca di stime ottimali per la differenza

$$\sum_{n \leq N} d(n) - (N \log N + (2\gamma - 1)N)$$

costituisce il *Problema dei divisori di Dirichlet*, anch'esso tra i più famosi problemi irrisolti della Teoria dei Numeri.

2.4 Il teorema di Minkowski

Per ogni punto intero (p, q) del piano consideriamo il quadrato $Q(p, q)$ di lato 1, di cui (p, q) è il vertice in basso a sinistra (in rosso nella Figura 27). Osserviamo che il piano è l'unione disgiunta (a parte i lati) di tutti questi quadratini e che, ad esempio

$$Q(2, 1) = Q(0, 0) + (2, 1) ,$$

cioè i punti del quadrato $Q(2, 1)$ sono i punti del quadrato $Q(0, 0)$ a cui abbiamo sommato il vettore $(2, 1)$.

H. Minkowski ha dato contributi fondamentali alla Teoria dei Numeri introducendo un punto di vista "geometrico", di cui il teorema seguente, dimostrato nel 1889, è l'esempio più famoso.

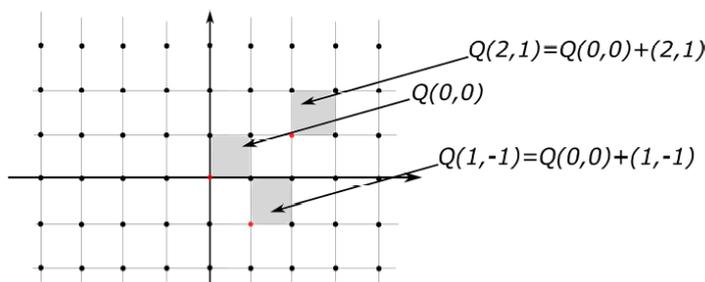


Figura 27: Suddividiamo il piano in quadratini.

Teorema 11 (Minkowski) Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ convesso, simmetrico rispetto all'origine, con $\text{Area}(D) > 4$. Allora D contiene punti interi diversi da $(0, 0)$.

Dimostrazione. Proviamo che esistono due punti $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ in D , tali che $\frac{1}{2}(x_1, y_1) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$. Infatti, per ogni $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ abbiamo (vedi la Figura 27 per alcuni esempi di quadrati traslati $Q(0, 0) + (p, q)$)

$$D_{(p,q)} := \left(\left(\frac{1}{2}D \right) \cap (Q(0, 0) + (p, q)) \right) - (p, q) \subseteq Q(0, 0),$$

e quindi $\cup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} D_{(p,q)} \subseteq Q(0, 0)$. Poiché $\text{Area}(D) > 4$, abbiamo

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \text{Area}(D_{(p,q)}) &= \text{Area}\left(\frac{1}{2}D\right) = \frac{1}{4}\text{Area}(D) > 1 = \text{Area}(Q(0, 0)) \\ &\geq \text{Area}\left(\bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} D_{(p,q)}\right). \end{aligned}$$

La disuguaglianza

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} \text{Area}(D_{(p,q)}) > \text{Area}\left(\bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} D_{(p,q)}\right)$$

mostra che l'unione $\cup_{(p,q) \in \mathbb{Z}^2} D_{(p,q)}$ non è disgiunta ed esistono quindi due punti interi (p_1, q_1) e (p_2, q_2) , e due punti $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ in D tali che

$$\frac{1}{2}(x_1, y_1) - (p_1, q_1) = \frac{1}{2}(x_2, y_2) - (p_2, q_2)$$

(quindi $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$). Per simmetria $-(x_2, y_2) \in D$ e, per convessità,

$$\mathbb{Z}^2 \ni (p_1, q_1) - (p_2, q_2) = \frac{1}{2}(x_1, y_1) - \frac{1}{2}(x_2, y_2) = \frac{(x_1, y_1) + (-(x_2, y_2))}{2}$$

sta in D . Quindi $D \ni (p_1, q_1) - (p_2, q_2) \neq 0$ e il teorema è dimostrato. ■

Giancarlo Travaglini

(Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Milano-Bicocca)

